

离散数学作业 Problem set 6

Problem 1

设 $S = \{1, 2, \dots, 10\}$, 问下面定义的运算能否与 S 构成代数系统 $\langle S, * \rangle$ 如果能构成代数系统则说明 $*$ 运算是否满足交换律、结合律, 并求 $*$ 运算的单位元和零元。

- $x * y = \gcd(x, y)$, $\gcd(x, y)$ 是 x 与 y 的最大公约数。
- $x * y = \text{lcm}(x, y)$, $\text{lcm}(x, y)$ 是 x 与 y 的最小公倍数。
- $x * y =$ 大于等于 x 和 y 的最小整数。
- $x * y =$ 质数 p 的个数, 其中 $x \leq p \leq y$ 。

Problem 2

设 S 是一个半群, 单位元为 e . 设 b 和 b' 是 a 的逆元, 证明 $b = b'$, 即逆元如果存在就唯一。

Problem 3

考虑有理数集合 Q , 设 $*$ 表示 Q 上的运算, 定义为 $a * b = a + b - a \times b$.

- 求 $3 * 4$, $2 * (-5)$ 和 $7 * \frac{1}{2}$.
- $(Q, *)$ 是半群吗? 可交换吗?

- 求 $*$ 的单位元
- Q 中有元素有逆元吗? 是什么元素?

Problem 4

设 $\langle G, \times \rangle$ 是群, $\forall a, b \in G, a^3 \times b^3 = (a \times b)^3, a^4 \times b^4 = (a \times b)^4, a^5 \times b^5 = (a \times b)^5$, 证明: $\langle G, \times \rangle$ 是阿贝尔群 (满足交换律的群)。

Problem 5

定义群 G 上的函数 $f, f(x) = x - 1, x \in G$, 证明 f 为自同构当且仅当 G 为交换群。

Problem 6

设 H 是仅有两个右陪集的群 G 的一个子群。证明 H 是正规的

Problem 7

设 H 和 K 分别为群 G 的 r, s 阶子群, 若 r 与 s 互素, 证明 $H \cap K = e$.

Problem 8

假设 G 是一阿贝尔群, 证明任何商群 G/H 都是阿贝尔群.

Problem 9

设 G 是一个群, H 和 N 是 G 的子群, 且 N 是 G 的正规子群, 证明:

- HN 是 G 的一个子群
- $H \cap N$ 是 H 的一个正规子群

Problem 10

考虑在模 7 乘法下的群 $G = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

- 求 G 的运算表
- 求 2, 3, 6 的逆元
- 求 2 和 3 的阶以及由它们生成的子群
- G 是循环群吗?